

**Міністерство освіти і науки України  
Донбаська державна машинобудівна академія**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
**до практичних занять та самостійної роботи**  
**з дисципліни**  
**«Теорія функцій»**  
для студентів спеціальності  
014 «Середня освіта (Математика)»

Затверджено  
на засіданні  
методичної ради  
Протокол № 8 від 20.05.2021

**Краматорськ 2021**

## УДК 517

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Теорія функцій» для студентів спеціальності 014 «Середня освіта (Математика)»/ Укл.: О. Г. Ровенська. – Краматорськ: ДДМА, 2021. – 48 с.

*Методичні вказівки «Теорія функцій» містять у стислому вигляді основний теоретичний матеріал з курсу теорії функцій, практичні вправи та методичні матеріали щодо організації самостійної роботи й комплексного контролю знань студентів. Призначений для студентів вищих навчальних закладів, викладачів математичних дисциплін.*

Укладач

О. Г. Ровенська, доц.

Відпов. за вип.

В. М. Астахов, доц.

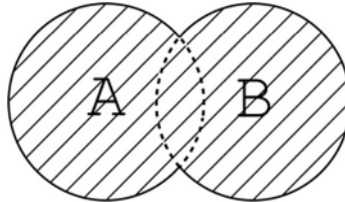
## ЗМІСТ

|                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| 1 ВПРАВИ ДО РОЗДІЛІВ КУРСУ...                                       | 3  |
| 1 Вправи до розділу «Поняття множини. Види множин. Потужність»..... | 3  |
| 2 Вправи до розділу «Метричні простори».....                        | 6  |
| 3 Вправи до розділу «Відкриті та замкнені множини».....             | 10 |
| 4 Вправи до розділу «Повні та компактні метричні простори».....     | 13 |
| 5 Вправи до розділу «Принцип стискальних відображень».....          | 14 |
| 6 Вправи до розділу «Лінійні та нормовані простори».....            | 16 |
| 7 Вправи до розділу «Евклідові простори».....                       | 18 |
| 8 Вправи до розділу «Гільбертові простори».....                     | 19 |
| 9 Вправи до розділу «Поняття міри».....                             | 23 |
| 10 Вправи до розділу «Вимірні функції».....                         | 24 |
| 11 Вправи до розділу «Інтеграл Лебега від обмеженої функції».....   | 24 |
| Приклади завдань підвищеної складності ...                          | 25 |
| 2 КОНТРОЛЬ ЗНАНЬ.....                                               | 26 |

## 1 ВПРАВИ ДО РОЗДІЛІВ КУРСУ

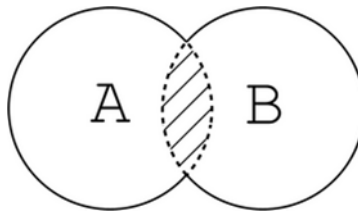
### 1 Вправи до розділу «Поняття множини. Види множин. Потужність»

**Основні теоретичні відомості.** Об'єднання:  $C = A \cup B$  (рис. 1).



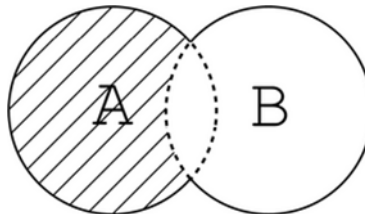
*Рисунок 1*

Перетин:  $C = A \cap B$  (рис.2).



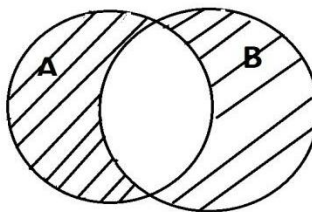
*Рисунок 2*

Різниця  $C = A / B$  (рис. 3).



*Рисунок 3*

Симетрична різниця  $C = A \Delta B$  (рис. 4).



*Рисунок 4*

Доповнення  $S/A$  (рис. 5).

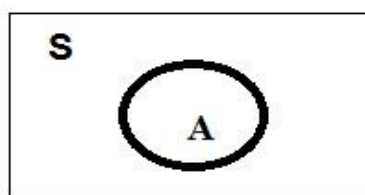


Рисунок 5

**Завдання 1.1.** Виконати операції над множинами

$$A = \{5, 7, 9\}, B = \{5, 8, 9, 12\}.$$

Розв'язання:

$$A \cup B = \{3, 5, 7, 8, 9, 12\},$$

$$A \cap B = \{9\},$$

$$A/B = \{7\}.$$

**Завдання 1.2.** Виконати операції над множинами

$$X = \{x: -3 \leq x \leq 8\}, Y = \{x: -5 \leq x \leq 6\}.$$

Розв'язання:

$$X \cap Y = \{x: -3 \leq x < 6\},$$

$$X \cup Y = \{x: -5 < x \leq 8\}.$$

**Завдання 1.3.** Знайти перетин таких множин:

а)  $X$  – множина двохзначних натуральних чисел,  $Y$  – множина парних натуральних чисел;

б)  $X$  – множина всіх паралелограмів,  $Y$  – множина трапецій.

Розв'язання:

а)  $X = \{10, 11, \dots, 99\}, Y = \{2, 4, \dots, 98, \dots\}, X \cap Y = \{10, 12, 14, \dots, 98\};$

б)  $\emptyset$ .

**Завдання 1.4.** Задані множини

$$A = \{10\}, B = \{10, 15\}, C = \{10, 15\}.$$

Визначити входження однієї множини в іншу.

Розв'язання:

$$A \in B, C \in A, C \in B.$$

**Завдання 1.5.** Довести властивості операцій над множинами:

а)  $A \cup B = B \cup A;$

б)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

Розв'язання:

а) Нехай  $x \in A \cup B$ , тоді  $x \in A$  або  $x \in B$ . Звідси  $x \in B \cup A$ . Обернене доводиться подібним чином.

б) Нехай  $x \in A \cup (B \cap C)$  тоді або  $x \in A$ , або  $x \in B \cap C$ ,  $x \in A \cup B$  і  $x \in A \cup C$ . Тоді  $x \in A \cup B$ ,  $x \in A \cap C$ . Отже,  $x \in B \cup C$ ,  $x \in A$ ,  $x \in B \cup C$ .  $x \in A \cup B$  і  $x \in A \cap C$ .

$A \cup B \cap (A \cup C)$ ,  $x \in A \cup B \cap (A \cup C)$ .

Доведемо обернене. Нехай  $x \in A \cup B \cap (A \cup C)$ , то  $x \in A \cup B$  і  $x \in A \cup C$ . Отже,  $x \in A \cup B$  і  $x \in A \cup C$ . Із цього слідує, що  $x \in A$ , або  $x \in B \cap C$ ,  $x \in A \cup (B \cap C)$  (рис. 5).

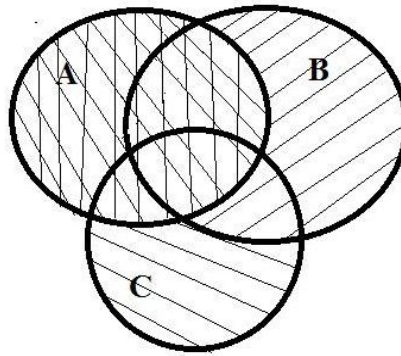


Рисунок 5

**Завдання 1.6.** Знайти доповнення до множини натуральних парних чисел

$$A = \{x : x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$$

Розв'язання:

$$\mathbb{N} \setminus A = \{x : x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$$

**Завдання 1.7.** Довести, що множина зліченна:

$$\{n \in \mathbb{N} : n = k^2, k \in \mathbb{N}\}$$

Розв'язання. Числам 1, 4, 9, 16, 25, 36... поставимо у відповідність числа 1, 2, 3, 4, 5, 6,... Отже, множина зліченна.

**Завдання 1.8.** Довести, що множина додатних раціональних чисел

$$R = \left\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots \right\}$$

зліченна.

Розв'язання. Наступні множини є зліченими:

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$

$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$

$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \dots$

$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \dots$

Об'єднання зліченного числа злічених множин є зліченим.

**Завдання 1.9.** Довести, що множина відрізків на прямій, які попарно не перетинаються, скінченна або зліченна (рис. 6).

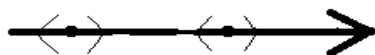


Рисунок 6

Розв'язання. Кожен відрізок має раціональну точку, причому для відрізків, що не перетинаються, ці точки різні, отже, множина є зліченною.

## 2 Вправи до розділу «Метричні простори»

**Основні теоретичні відомості.** Метрика – додатнозначна функція, що задовольняє умовам:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$  тоді й тільки тоді, коли  $x = y$  (аксіома тотожності).
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (аксіома симетричності).
3.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$  (аксіома трикутника).

Відображення множин:

$f: M \rightarrow N$ ,  $a \in M$ ,  $b \in N$ ,  $b = f(a)$ ,  $a$  – прообраз,  $b$  – образ.

Якщо  $f(M) = N$ , відображення є сюр'єкцією.

Якщо за умови  $x \neq x_2$  випливає  $y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2)$ , відображення є ін'єкцією.

Разом сюр'єкція та ін'єкція – це бієкція.

**Класифікація точок метричного простору.** Точка  $x_0$  називається *граничною* точкою множини  $M$  з  $X$  ( $M$  є підмножиною простору  $X$ ), якщо будь-який її окіл містить хоча б одну точку з множини  $M$ .

*Внутрішньою* точкою множини є точка, що входить у цю множину зі своїм оточенням.

Ізольована точка множини – точка, у якій існує окіл, який не містить інших точок цієї множини.

**Завдання 2.1.** Довести, що задані функції на вказаних множинах є метриками:

а)  $\rho(x, y) = \min_{1 \leq n \leq m} |x_n - y_n|$  на множині  $R$ ;

б)  $\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{n}$  на множині  $l_2$ .

Розв'язання:

а) Перевіримо виконання аксіом метрики:

1.  $x = y, \rho(x, y) = \min_{1 \leq n \leq m} |x_n - x_n| = 0$ .

2.  $\rho(x, y) = \min_{1 \leq n \leq m} |x_n - y_n| = \min_{1 \leq n \leq m} |y_n - x_n| = \rho(y, x)$ ,

3.  $\rho(x, z) = \min_{1 \leq n \leq m} |x_n - z_n| = \min_{1 \leq n \leq m} |x_n - y_n + y_n - z_n| \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

Усі аксіоми виконуються.

б) Перевіримо виконання аксіом метрики:

1.  $x = y, \rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - x_n|}{n} = 0$ .

2.  $\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n - x_n|}{n} = \rho(y, x)$ .

3.  $\rho(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - z_n|}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n + y_n - z_n|}{n} \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

Усі аксіоми метрики виконуються.

**Завдання 2.2.** Довести, що функція

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leq n \leq m} |x_n - y_n|$$

на множині  $R^n$  є метрикою.

Розв'язання. Перевіримо виконання аксіом метрики.

1.  $x = y, \rho(x, y) = \max_{1 \leq n \leq m} |x_n - x_n| = 0$ .

2.  $\rho(x, y) = \max_{1 \leq n \leq m} |x_n - y_n| = \max_{1 \leq n \leq m} |y_n - x_n| = \rho(y, x)$ .

3.  $\rho(x, z) = \max_{1 \leq n \leq m} |x_n - z_n| \leq \max_{1 \leq n \leq m} |x_n - y_n| + \max_{1 \leq n \leq m} |y_n - z_n| \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

Аксіоми метрики виконуються.

**Завдання 2.3.** Яка із указаних функцій, що відображають  $[1, 3] \rightarrow [1, 3]$ , є сюр'єкцією, ін'єкцією, бієкцією?

а)  $f(x) = 3^x$ , б)  $f(x) = 12x - 1/2$ , в)  $f(x) = 3x$ .

Розв'язання:

а)  $y \in [1, 3]$  – розв'язку немає, відображення не сюр'єкція, ін'єкція (рис.9).



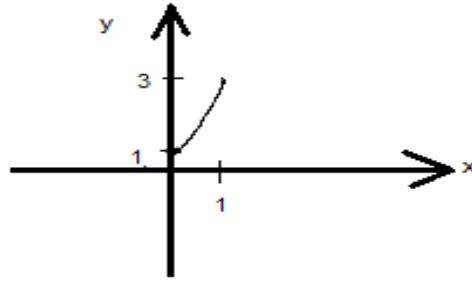


Рисунок 9

б)  $y_1 = y_2$ , наприклад, при  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ , не сюр'єкція, не ін'єкція (рис. 10).

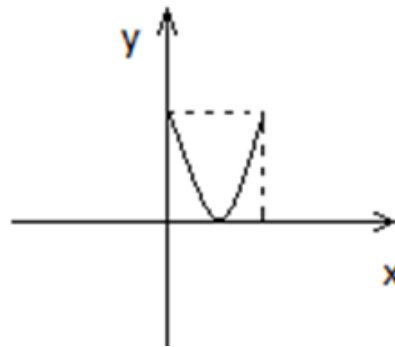


Рисунок 10

в) Задана функція ін'єкція і сюр'єкція, отже – бієкція (рис. 11).



Рисунок 11

**Завдання 2.4.** Довести, що якщо

$$f : E \rightarrow F, \quad A \subset F, \quad B \subset F,$$

то

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Розв'язання. Якщо  $x \in f^{-1}(A \cap B)$ , то  $f(x) \in A$  і  $f(x) \in B$ . Звідси  $x \in f^{-1}(A)$  і  $x \in f^{-1}(B)$ . Отже,  $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ .

**Завдання 2.5.** Указати граничні, внутрішні й ізольовані точки множин:

а)  $A = [0; 3] \cup \{4\}$ , б)  $E = \{1/4; 1/16; \dots\}$ .

Розв'язання:

а) граничні  $[0; 3]$ , внутрішні  $(0; 3)$ , ізольовані  $\{4\}$ .

б) граничні  $\{0\}$ , внутрішніх точок немає, ізольовані  $\{1/4; 1/16; \dots\}$ .

### Завдання для самостійної роботи

**Завдання 2.6.** Перевірити, чи є функції метриками на зазначених множинах:

а)  $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$ ,  $R$ ;

б)  $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$ ,  $X = [0; \infty)$ .

**Завдання 2.7.** Класифікувати точки множин:

а)  $A = [0; 3] \cup (4; 5] \cup \{1\} \cup \{0\}$ ; б)  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{1,2} \in Q\}$ .

**Завдання 2.8.** Указати множину, яка має рівно три граничні точки.

### 3 Вправи до розділу «Відкриті та замкнені множини»

**Основні теоретичні відомості.** Точка  $x_0$ , що належить простору  $X$ , називається *границею* послідовності  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  якщо для будь-якого як завгодно малого числа  $\varepsilon > 0$  існує номер  $N$  такий, що, починаючи з нього, усі числа послідовності входять в  $\varepsilon$ -окіл точки  $x_0$ .

Точка  $x_0$  називається *границею* послідовності  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_0, x_n) = 0$ .

Множина називається *замкненою*, якщо вона співпадає зі своїм замиканням (тобто усі граничні точки містяться в цій множині).

*Відкритою* називається множина, яка складається тільки з внутрішніх точок.

**Завдання 3.1.** Знайти границю послідовності

$$\left\{ \frac{1}{n^2} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots \right\}.$$

Розв'язання. Доведемо за означенням, що число 0 є границею цієї послідовності.

I спосіб:

$$\begin{aligned} \rho(0, x_N) &< \varepsilon, \\ \rho(0, x_N) &= |0 - x_N| < \varepsilon \Rightarrow |x_N| < \varepsilon, \\ \frac{1}{n^2} &< \varepsilon, \\ n^2 &> \frac{1}{\varepsilon}, \\ n &> \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad N = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil. \end{aligned}$$

Наприклад, якщо  $\varepsilon = 100$ , то  $N = 10$ .

II спосіб:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| 0 - \frac{1}{n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

**Завдання 3.2.** Указати замкнені й відкриті множини:

1.  $A = [0; 3) \cup 6$ .
2.  $A = [0; 3]$ .
3.  $A = (-2; 1]$ .
4.  $A = [0; 7]$ .

Розв'язання:

1. Відкрита.
2. Відкрита.
3. Відкрита.
4. Замкнена.

### Завдання для самостійної роботи

**Завдання 3.3.** Довести, що множина  $A = (-5; 3) \cap [1; 2]$  є замкненою множиною.

## 4 Вправи до розділу «Повні та компактні метричні простори»

**Основні теоретичні відомості.** Нехай  $X$  – метричний простір і  $\{x_n\}$  – послідовність елементів цього простору. Послідовність  $\{x_n\}$  називається

фундаментальною, якщо існує номер  $N$ , починаючи з якого для всіх номерів  $m > N$  виконується нерівність  $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$  для як завгодно малого  $\varepsilon > 0$ .

Простір, у якому кожна фундаментальна послідовність збігається (до точки цього простору), називається *повним*.

Нехай  $X$  – довільний метричний простір. Множина  $M \in X$  називається *компактною*, якщо з будь-якої послідовності  $\{x_n\}$  цієї множини можна виділити збіжну послідовність  $\{x_{n_k}\}$ .

### Завдання для самостійної роботи

**Завдання 4.1.** Перевірити, чи є послідовність  $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$  фундаментальною в просторі  $C_{[1;3]}$ .

## 5 Вправи до розділу «Принцип стискальних відображень»

**Основні теоретичні відомості.** Нехай  $X$  – метричний простір і  $f: X \rightarrow X$  – відображення метричного простору в собі. Відображення  $f: X \rightarrow X$  називається *стискальним відображенням (стиском)*, якщо для будь-яких двох точок  $x, y$ , які належать  $X$ , існує число  $\alpha < 1$  таке, що виконується нерівність

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \rho(x, y).$$

$f(x) = x$  – нерухома точка.

**Завдання 5.1.** Показати, що функція  $f(x) = x^2$  відображає відрізок  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ . Чи є це відображення стискальним?

Розв'язання. Зробимо креслення (рис. 10).

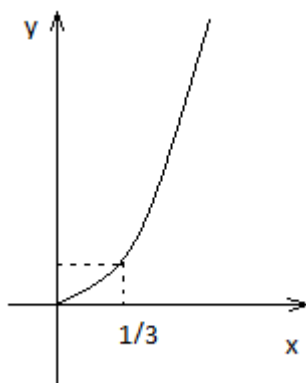


Рисунок 10

Оскільки  $0 \leq x^2 \leq \frac{1}{9}$ , то  $\left[0, \frac{1}{9}\right] \subset \left[0, \frac{1}{3}\right]$ . Відображає відрізок у себе.

Нехай  $c \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ . Оскільки

$$|f'(c)| = 2c,$$

$$0 \leq ac \leq \frac{2}{3}, \quad a < 1$$

$$0 \leq c \leq \frac{1}{3},$$

– відображення стискальне.

**Завдання 5.2.** Чи є стискальним відображення  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  напівпрямої  $[1, \infty)$  у себе?

Розв'язання:

$$|f'(c)| = \left|1 - \frac{1}{c^2}\right|,$$

$$1 \leq c^2 \leq \infty,$$

$$0 \leq \frac{1}{c^2} \leq 1,$$

$$1 - \frac{1}{c^2} \in [0, 1).$$

При досить великому  $c$  параметр  $\alpha$  стає як завгодно близьким до одиниці, тому відображення не стискальне.

**Завдання 5.3.** Показати, що рівняння  $x = \sqrt[3]{x+2}$  можна розв'язати методом послідовного наближення й обчислити його корені з точністю до 0,01.

Розв'язання. Необхідно довести, що рівняння задає стискальне відображення. За теоремою Банаха:

1. Відображення переводить відрізок  $[1; b]$  у себе.
2. Виконується умова Липшиця

$$\exists f' \text{ на } [1; b] \text{ і } |f'(c)| \leq k < 1.$$

Маємо (рис. 11)

$$f_1(x) = x f_2(\sqrt[3]{x+2}).$$

$$\bar{x} \in [1, 2]$$

$$1. x = f(x), f(x) = \sqrt[3]{x+2}.$$

2.  $f(x)$  відображає  $[1, 2]$  в себе.

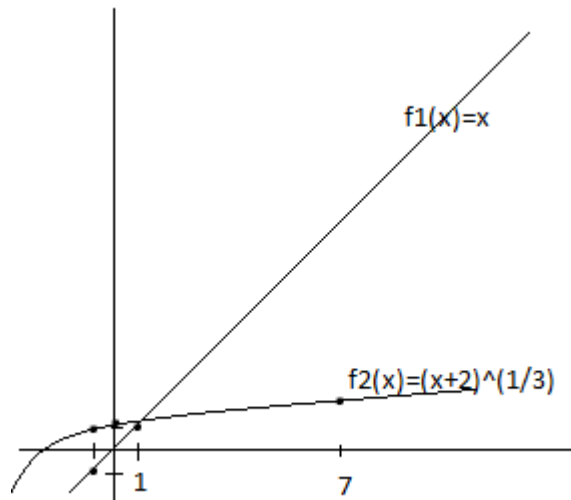


Рисунок 11

$$0 \leq x \leq 2,$$

$$2 \leq x+2 \leq 4,$$

$$\sqrt[3]{2} \leq \sqrt[3]{x+2} \leq \sqrt[3]{4},$$

$$[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}] \subset [1, 2].$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} (x+2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}},$$

$$\sqrt[3]{4} \leq \sqrt[3]{(x+2)^2} \leq \frac{\sqrt[3]{16}}{2 \cdot \sqrt[3]{2}},$$

$$\frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{2}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{4}} \leq \frac{1}{3},$$

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{3} < 1.$$

Це означає, що відображення є стискальним.

$$x_0 = 1, f(x_0) = \sqrt[3]{1+2} = 1,442 = x_1,$$

$$x_1 = 1,442, f(x_1) = \sqrt[3]{1,442+2} = 1,510 = x_2,$$

$$x_2 = 1,510, f(x_2) = 1,520 = x_3,$$

$$x_3 = 1,520, f(x_3) = 1,521.$$

Отже, розв'язок  $\bar{x} = 1,52$ .

## Завдання для самостійної роботи

**Завдання 5.4.** Показати, що рівняння  $xe^x = 1$  задає стискальне відображення.

### 6 Вправи до розділу «Лінійні та нормовані простори»

**Основні теоретичні відомості.** Властивості норми:

1.  $\|x\| \geq 0$ , причому  $\|x\| = 0$  тільки в тому випадку, якщо  $x = 0$ .
2.  $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ ,  $a$  – число.
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Завдання 6.1.** Довести, що  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  визначає норму в просторі  $R^n$ .

Розв'язання. Перевіримо виконання властивостей норми:

1.  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0$ ,
2.  $\|\alpha x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha x_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\alpha| \|x\|_1$ ,
3.  $\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$ .

**Завдання 6.2.** Обчислити норми  $\|x\|$ ,  $\|x\|_1$ ,  $\|x\|_\infty$  елемента  $c = (1; 0; -7; 2)$

в просторі  $R^n$ .

Розв'язання:

$$\|x\| = \sqrt{52},$$

$$\|x\|_1 = \sqrt{10},$$

$$\|x\|_\infty = 7.$$

**Завдання 6.3.** Обчислити норму елемента  $x \in C_{[-1;2]}$   $x(t) = 2t - t^2 + 1$  у просторі  $C_{[-1;2]}$ .

Розв'язання:

$$\|x\| = \max_{-1 \leq t \leq 2} |x(t)| = \max_{-1 \leq t \leq 2} |2t - t^2 + 1| = 2.$$

**Завдання 6.4.** Знайти норму елемента в зазначеному просторі:

а)  $\cos \pi t$  у просторі  $C_{[-1;1]}$ ; б)  $2^t$  у просторі  $C_{[-1;5]}$ .

Розв'язання:

$$\text{а) } \|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} |\cos \pi t| = 1.$$

$$\text{б) } \|2^t\| = \max_{-1 \leq t \leq 5} |2^t| = 2^5 = 32.$$

## Завдання для самостійної роботи

**Завдання 6.5.** Довести, що в просторі  $R^n$  норма може бути також задана формулою  $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

### 7 Вправи до розділу «Евклідові простори»

**Основні теоретичні відомості.** Властивості скалярного добутку:

1.  $(x, y) = (y, x)$ .
2.  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ .
3.  $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ .
4.  $(x, x) \geq 0$ , причому  $(x, x) = 0$  тільки в тому випадку, якщо  $x = 0$ .

**Завдання 7.1.** Обчислити скалярний добуток векторів  $\bar{a}(2; -4; 5; 1)$  і  $\bar{b}(0; 2; 3; 0)$ .

Розв'язання:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = 2 \cdot 0 + (-4) \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 7, \quad \bar{a}, \bar{b} \in R^4.$$

**Завдання 7.2.** Обчислити скалярний добуток елементів  $f(t) = t$  і  $g(t) = \frac{1}{t^2}$  у просторі  $C_2[1; 3]$ .

Розв'язання:

$$(f, g) = \int_1^3 t \cdot \frac{1}{t^2} dt = \int_1^3 \frac{1}{t} dt = \ln|t| \Big|_1^3 = \ln|3| - \ln|1| = \ln 3.$$

**Завдання 7.3** Обчислити скалярний добуток елементів  $x(t) = t$ ,  $y(t) = \frac{1}{t}$  у просторі  $C_2[1; 2]$ .

Розв'язання:

$$(x, y) = \int_1^2 t \cdot \frac{1}{t} dt = 1.$$

**Завдання 7.4** Обчислити скалярний добуток елементів  $s_1 = \{1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9} \dots\}$ ,  $s_2 = \{0; \frac{3}{7}; \frac{9}{49}; \dots\}$  у просторі  $l_2$ .

Розв'язання:



$$\langle s_1, s_2 \rangle = \frac{1}{7} + \frac{1}{49} + \dots = \frac{1}{6}.$$

**Завдання 7.5.** Знайти скалярний добуток елементів  $x = (1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots)$ ,  $y = (1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \dots)$  у просторі  $l_2$ .

Розв'язання:

$$(x, y) = 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} + \dots;$$

$$(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{6}{5}.$$

### Завдання для самостійної роботи

**Завдання 7.6.** Обчислити скалярний добуток елементів  $x \langle \rangle = t$ ,  $y \langle \rangle = \sin t$  у просторі  $C_2[0; 1]$ .

**Завдання 7.7.** Обчислити скалярний добуток елементів  $a = \langle 1; 0; 5 \rangle$ ,  $b = \langle 4; 3 \rangle$  у просторі  $R^3$ .

## 8 Вправи до розділу «Гільбертові простори»

**Основні теоретичні відомості.** Ряд Фур'є в гільбертовому просторі. Рядом Фур'є називається вираз вигляду  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ , де  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  – ортогональна нормована система і  $c_k = (f, \varphi_k)$ ,  $k=1, 2, \dots, n$  – коефіцієнти Фур'є.

**Завдання 8.1.** Для заданого елемента побудувати ряд Фур'є за ортогональними системами зазначеного простору:

а)  $a = \langle 2/3; 4/9; \dots \rangle, a \in l_2$ ; б)  $f \langle \rangle = x+1, C_2[0; \pi]$ .

Розв'язання:

а) Обчислимо коефіцієнти Фур'є заданого елемента за формулою

$$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle, k=1, 2, \dots$$

Отримаємо

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 2/3, \quad c_3 = 4/9, \dots$$

Утворимо ряд Фур'є елемента  $a = (1/2; 2/3; 4/9; \dots) \in l_2$ :

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = 1 \cdot (0; 0; \dots) + 2/3 \cdot (1; 0; \dots) + 4/9 \cdot (0; 1; \dots) + \dots = (1/2; 2/3; 4/9; \dots).$$

б) Обчислимо коефіцієнти Фур'є заданого елемента за формулою

$$c_k = (f, \varphi_k) \quad k = 1, 2, \dots$$

Отримаємо

$$c_1 = -\frac{\pi}{24}, \quad c_{2n} = \frac{1 - (-1)^n}{6\pi n^2}, \quad c_{2n+1} = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{6\pi n^2},$$

Утворимо ряд Фур'є елемента  $f(x) = x + 1$ :

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = -\frac{\pi}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{6\pi n^2} \cos nx + \frac{5(-1)^{n+1}}{6\pi} \sin nx.$$

**Завдання 8.2.** Розвинути елемент  $I = (1/2; 1/4; 1/8; \dots) \in l_2$  за ортонормованою системою цього простору  $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$ ,  $\dots$ .

Розв'язання. Обчислимо коефіцієнти Фур'є заданого елемента за формулами

$$c_k = (I, e_k) \quad k = 1, 2, \dots$$

Отримаємо

$$c_1 = 1/2, \quad c_2 = 1/4, \quad c_3 = 1/8, \dots$$

Утворимо ряд Фур'є елемента  $I = (1/2; 1/4; 1/8; \dots) \in l_2$ :

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} (1/4)^k \cdot c_k = 1/2(1, 0, 0, \dots) + 1/4(0, 1, 0, \dots) + 1/8(0, 0, 1, \dots) + \dots$$

### Завдання для самостійної роботи

**Завдання 8.3.** Утворити ряд Фур'є функції  $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$  за ортогональною системою простору  $C_2[\pi; \pi]$ .

## 9 Вправи до розділу «Лінійні функціонали в лінійних нормованих просторах»

**Основні теоретичні відомості.** Обмежений лінійний функціонал

$$|f(x)| \leq M \|x\|,$$

де  $M$  – найменша з таких констант – норма  $\|f\|$ ,

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\|.$$

**Завдання 9.1.** Обчислити норму функціонала  $f(x) = x(1) - 2x(2)$ , заданого в просторі  $C[0,2]$ .

Розв'язання:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |x(1) - 2x(2)| \leq |x(1)| + |2x(2)| = \\ &= |x(1)| + 2|x(2)| \leq 3 \max_{0 \leq x \leq 2} |x| = 3\|x\|. \end{aligned}$$

Припустимо, що  $\|f\| = 3$ .

$$\|f\| \leq \frac{|f(x)|}{\|x\|_{C[0,2]}} = \frac{|x(1) - 2x(2)|}{\max_{0 \leq t \leq 2} |x(t)|},$$

$$\max_{0 \leq t \leq 2} |x(t)| = 1.$$

Оберемо неперервну функцію  $x(t)$ , так, щоб  $\max_{0 \leq t \leq 2} |x(t)| = 1$ . Отже,  $\|f\| = 3$  – норма функціонала.

### Завдання для самостійної роботи

**Завдання 9.2** Обчислити норму функціонала  $\|f\| = \int_0^1 x(t) dt$  у просторі  $C_2[0,1]$ .

## 10 Вправи до розділу «Лінійні оператори»

**Основні теоретичні відомості.** Нехай  $E_1$  і  $E_2$  – два лінійних нормованих простори. Лінійним оператором, діючим з  $E_1$  у  $E_2$ , називається відображення  $A = Ax$ ,  $x \in E_1$ , що задовольняє умовам:

1.  $A(x + y) = Ax + Ay$  (адитивність).

2.  $A(\alpha x) = \alpha Ax$  (однорідність).

Обмеженість лінійного оператора означає, що існує така константа  $M$ , що

$$\|Ax\| \leq M \cdot \|x\|, \quad \forall x \in E_1$$

Найменша з таких констант називається нормою оператора  $A$  і позначається  $\|A\|$ .

### *Завдання для самостійної роботи*

**Завдання 10.1.** Оцінити норму інтегрального оператора Фредгольма в просторі  $C_{[a,b]}$ .

## **11 Вправи до розділу «Поняття міри»**

**Основні теоретичні відомості.** Замкнуті й відкриті множини на прямій.

Множина називається замкнутою, якщо вона співпадає зі своїм замкненням (тобто усі граничні точки містяться в цій множині)

Відкрита множина – це множина, яка складається тільки з внутрішніх точок.

Мірою інтервалу  $(a; b)$  називається його довжина:

$$m(a; b) = b - a.$$

Міра відрізка  $[a; b]$  дорівнює його довжині.

**Завдання 11.1.** Задана множина  $A = [0; 1] \cup 2$ . Знайти її:

1. Граничні точки.
2. Межові точки.
3. Точки дотику.
4. Внутрішні точки.
5. Ізольовані точки.

Розв'язання:

1. Граничні точки  $[0; 1]$ .
2. Межові точки  $0, 1, 2$ .
3. Точки дотику  $[0; 1]$ .
4. Внутрішні точки  $(0; 1)$ .
5. Ізольована точка  $2$ .

**Завдання 11.2.** Знайти міру зазначених множин на прямій:

1.  $[-1; 2]$ .
2.  $[-1; 1] \cup 2$ .
3.  $[-1; 2]$ .
4.  $[-1; 1] \cup [-4; 5] \cup [-1; 1] \cup \emptyset$ .
5.  $[2; 5] \cup \{3\} \cup [7; 8]$ .
6.  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k = [\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}]$ .

Розв'язання:

1.  $m[-1; 2] = 2$ .
2.  $m[-1; 1] \cup 2 = 2$ .
3.  $m[-1; 2] = 2$ .
4.  $m[-1; 1] \cup [-4; 5] \cup [-1; 1] \cup \emptyset = 3$ .
5.  $m[-1; 1] \cup [-4; 5] \cup [7; 8] = 4$ .
6.  $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k = [\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}]\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ .

### Завдання для самостійної роботи

**Завдання 11.3.** Знайти граничні точки таких множин на числовій прямій. Указати замкнені множини.

1.  $R$ .
2.  $\emptyset$ .
3.  $Z$ .
4.  $[-1; 1]$ .
5.  $[-1; 1]$ .
6.  $\left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\}$ .
7.  $R^+$  – позитивні числа.
8.  $R^-$  – негативні числа.

### 10 Вправи до розділу «Вимірні функції»

**Основні теоретичні відомості.** Вимірні функції на прямій:  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  – вимірні на множині  $E$  функція, якщо:

1.  $E$  – вимірні.
2.  $E \cap (a, \infty)$  – вимірні для всіх дійсних  $a$ .

**Критерій вимірності.** Для того щоб майже всюди скінченна функція  $f \in \mathcal{L}^1$  була вимірною на відрізку  $[a; b]$ , необхідно й достатньо, щоб вона була майже всюди неперервною.

**Завдання 10.1.** Указати вимірні функції на заданій множині:

1.  $f \in \mathcal{L}^1 = x + 1, E = [0; 3]$ .
2.  $f \in \mathcal{L}^1 = x + 1, E = [0; \infty)$ .
3.  $f \in \mathcal{L}^1 = x + 1, E = \mathbb{R}$ .
4.  $f \in \mathcal{L}^1 = \frac{1}{x}, E = [0; 3]$ .
5.  $f \in \mathcal{L}^1 = \frac{1}{x}, E = [0; 3]$ .
6.  $f \in \mathcal{L}^1 = 5, E = [0; 3]$ .

Розв'язання:

1. Вимірна.
2. Невимірна, оскільки множина  $E$  невимірна.
3. Невимірна, оскільки множина  $E$  невимірна.
4. Вимірна.
5. Вимірна.
6. Вимірна.

**Завдання 10.2.** Довести, що функція  $y = f(x), x \in \mathbb{R}$  вимірна за Лебегом на  $\mathbb{R}$ , якщо

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{x^4 + n^4}.$$

Розв'язання. Для вимірності функції  $f \in \mathcal{L}^1$  необхідно й достатньо, щоб її можна було подати у вигляді границі рівномірно збіжної послідовності простих, вимірних функцій.

Члени розглянутого ряду – неперервні функції на  $\mathbb{R}$ , тому вимірні за Лебегом. Оскільки

$$\frac{x}{x^4 + n^4} \sim \frac{x}{n^4},$$

то заданий ряд є еквівалентним ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^4},$$

який збігається. Отже, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{x^4 + n^4}$$

також збігається, тому сума ряду є вимірною за Лебегом.

**Завдання 10.3.** Довести, що функція  $y = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  вимірна за Лебегом на  $\mathbb{R}$ , якщо

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \cos x}$$

**Розв'язання.** Члени розглянутого ряду є неперервними функціями на  $\mathbb{R}$ . Розглянемо ряд, у якого

$$u_n = \frac{1}{n + \cos x},$$

$$u_2 = \frac{1}{2 + \cos x} > u_3 = \frac{1}{3 + \cos x} > u_4 = \frac{1}{4 + \cos x} > \dots > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + \cos x} = 0.$$

Отже, заданий ряд також збігається. Тому сума ряду є вимірною за Лебегом.

## 11 Вправи до розділу «Інтеграл Лебега від обмеженої функції»

**Основні теоретичні відомості.** Обчислення інтеграла Лебега.

Критерій інтегрованості функції  $f(x)$  за Ріманом. Для того щоб функція  $f(x)$  була інтегрована за Ріманом, необхідно й достатньо, щоб вона була неперервною майже скрізь на відрізку  $[a; b]$ .

Зв'язок інтегралів Рімана і Лебега. Якщо функція  $f(x)$  інтегрована за Ріманом на відрізку  $[a; b]$ , то вона інтегрована і за Лебегом на цьому відрізку, і обидва інтеграла рівні:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) d\mu.$$

**Завдання 11.1.** Обчислити інтеграл Лебега:

$$\int_{\mathbb{R}} \text{sign } t \cos \pi x dx$$

$$\text{sign } t = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0 \\ -1 & \text{при } t < 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Розв'язання. Розглянемо випадок  $\cos \pi x > 0$ :

$$\pi x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right).$$

Розглянемо випадок  $\cos \pi x < 0$ :

$$\pi x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right).$$

Розглянемо випадок  $\cos \pi x = 0$ :

$$\begin{aligned} \pi x &= -\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}, \\ x=0 \quad A_1 &= \left\{-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right\}, \\ x>0 \quad A_2 &= \left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \\ x<0 \quad A_3 &= \left(-3; -\frac{5}{2}\right). \end{aligned}$$

Отже,

$$\int_3^8 \text{sign} \cos \pi x dx = 0 \cdot m(A_1) + 1 \cdot m(A_2) - 1 \cdot m(A_3) = 0.$$

**Завдання 11.2.** Обчислити інтеграл Лебега від функції  $f(x) = \sin x$  на відрізку  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Розв'язання:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

**Завдання 11.3.** Обчислити інтеграл Лебега від функції

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x - \text{раціональне}, \\ \cos x, & x - \text{ірраціональне} \end{cases}$$

на відрізку  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .



Розв'язання. Використовуємо теорему про еквівалентні функції.  
 Маємо:  $f(x) \sim \cos x$ ,  $x$  – ирац., якщо  $x$  – ірраціональне. Отже,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

### Завдання для самостійної роботи

**Завдання 11.4.** Обчислити інтеграл Лебега від функції

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x - \text{раціональне}, \\ \sin^2 x, & x - \text{ірраціональне} \end{cases}$$

на відрізку  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

### 12 Приклади завдань підвищеної складності

**Завдання 12.1.** Довести, що для будь-яких чотирьох точок  $x, y, z, t$  метричного простору  $(X, \rho)$  справедливі нерівності:

- $|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y)$ .
- $|\rho(x, z) - \rho(y, t)| \leq \rho(x, y) + \rho(y, t)$ .

**Завдання 12.2.** Довести, що аксіоми метричного простору еквівалентні таким двом аксіомам:

- $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
- $\rho(x, z) + \rho(y, z) \geq \rho(x, y)$ .

**Завдання 12.3.** Нехай  $\rho(x, y)$  – метрика на множині  $X$ . Довести, що функції:

- $\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$
- $\rho_2(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}$

є метриками на  $X$

**Завдання 12.4.** Довести, що вказані множини із заданими на них метриками є повними метричними просторами:

1. Множина  $l^\infty$  усіх обмежених числових послідовностей  $x = (x_1, x_2, \dots)$ , які задовольняють умові  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i < \infty$  з метрикою  $\rho(x, y) = \sup_k |x_k - y_k|$ .

2. Множина  $l^\infty$  усіх числових послідовностей  $x = (x_1, x_2, \dots)$ , які прагнуть до нуля, з метрикою  $\rho(x, y) = \max_k |x_k - y_k|$ .

3. Множина  $C_{[a; b]}$  усіх неперервних функцій на відрізку  $[a; b]$  з метрикою  $\rho(x, y) = \max_{t \in [a; b]} |x(t) - y(t)|$ .

**Завдання 12.5.** Чи є лінійними такі функціонали в просторі  $C_{[0; 1]}$ ? У просторі  $L_2[0; 1]$ ?

$$1. F(x) = \int_0^1 x(t) \sin t dt, \quad F(x) = \frac{x}{2}.$$

$$2. F(x) = \int_0^1 x(t) \operatorname{sign}\left(t - \frac{1}{2}\right) dt, \quad F(x) = \int_0^1 x(t^2) t^{-2} dt.$$

**Завдання 12.6.** Які з указаних операторів є неперервними?

$$1. A: R^n \rightarrow R^n \text{ визначений формулою } y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, i = 1, \dots, n;$$

$$2. A: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1] \text{ визначений формулою } Ax(t) = \int_0^1 x(\tau) d\tau;$$

$$3. \frac{d}{dt}: C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1].$$

## 2 КОНТРОЛЬ ЗНАНЬ

### *Приклади завдань контрольної роботи 1*

#### Варіант 1

1. Довести, що множина раціональних точок відрізка  $[0;1]$  є зліченою.
2. Знайти норму елемента  $y = \sqrt{x}$  у просторі  $C_{[0;4]}$ .
3. Дати означення поняття «внутрішня точка множини».
4. Довести, що перетин будь-якого числа замкнутих множин є замкненою множиною.

#### Варіант 2

1. Довести, що множина непарних чисел є зліченою.
2. Знайти норму елемента  $y = x^3 + 2$  у просторі  $C_{[0;4]}$ .
3. Дати означення поняття «лінійно незалежні елементи».
4. Довести, що об'єднання скінченного числа замкнених множин є замкненою множиною

#### Варіант 3

1. Довести, що множина цілих чисел є зліченою.
2. Знайти норму елемента  $y = e^x$  у просторі  $C_{[0;4]}$ .
3. Дати означення поняття «лінійний функціонал»
4. Довести, що перетин скінченного числа відкритих множин є відкритою множиною.

#### Варіант 4

1. Довести, що множина парних чисел є зліченою.
2. Знайти норму елемента  $y = \sqrt{6-x}$  у просторі  $C_{[0;4]}$ .
3. Дати означення поняття «компактна множина».
4. Довести, що об'єднання будь-якого числа відкритих множин є відкритою множиною.

### *Приклади завдань контрольної роботи 2*

#### Варіант 1

1. Серед заданих множин вказати вимірну  $\in (2; 1]$ ,  $[1; \infty)$ . Обчислити її міру.
2. Обчислити інтеграл Лебега від функції за вказаною множиною:

$$f(x) = 2^x, \quad E = [1; 3].$$

3. Скласти ряд Фур'є для функції  $f(x) = x + 2$  в просторі  $L_2[-\pi; \pi]$ .

#### Варіант 2

1. Серед заданих множин вказати вимірну  $\in (7; 1]$ ,  $[1; \infty)$ . Обчислити її міру.
2. Обчислити інтеграл Лебега від функції за вказаною множиною:

$$f(x) = x^{-2}, \quad E = [1; 3].$$

3. Скласти ряд Фур'є для функції  $f(x) = x$  в просторі  $L_2[-\pi; \pi]$ .

#### Варіант 3

1. Серед заданих множин вказати вимірну  $\in (5; 2]$ ,  $[2; \infty)$ . Обчислити її міру.
2. Обчислити інтеграл Лебега від функції за вказаною множиною:

$$f(x) = \cos x, \quad E = [1; \pi].$$

3. Скласти ряд Фур'є для функції  $f(x) = x + 1$  в просторі  $L_2[-\pi; \pi]$ .

#### Варіант 4

1. Серед заданих множин вказати вимірну  $\in (1; 1]$ ,  $[1; \infty)$ . Обчислити її міру.
2. Обчислити інтеграл Лебега від функції за вказаною множиною:

$$f(x) = x + e^x, \quad E = [1; 1].$$

3. Скласти ряд Фур'є для функції  $f(x) = x - 1$  в просторі  $L_2[-\pi; \pi]$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Швець В. Т. Вища математика: теорія функцій комплексної змінної Одеса. Видавництво БМВ, 2014 - 284 с
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И.. Элементы функционального анализа. М.,1965.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.:«Высшая школа», 1982 – 270 с.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.:ФМ «Наука». 1968-493 с.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.:ФМ «Наука». 1977 – 741 с.
6. Balakrishnan A.V. Applied Functional Analysis Springer-Verlag, 1981. - 373 p.
7. Abramovich Y., Avgerinos E., Yannelis N.C. (eds.) Functional Analysis and Economic Theory Springer, 1998. — 300 p.
8. Теорія функцій комплексної змінної: / Уклад.: Є. В. Массалітіна, О. О. Кільчинський. – К.: НТУУ „КПІ”, 2008. – 54 с.
9. Сазонов Л.И. . Функциональный анализ для прикладных математиков. Часть 2. Функционалы и операторы . Ростов-на-Дону – 2007, 99 с.
10. Титчмарш Е. Теория функций. М. Наука, 1980, 463 с.
11. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. :М. Наука, 1974, 480 с.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

*Навчальне видання*

**Методичні вказівки  
до практичних занять та самостійної роботи  
з дисципліни  
«Теорія функцій»  
для студентів спеціальності 014 «Середня освіта (Математика)»**

Укладач      РОВЕНСЬКА Ольга Геннадіївна

За авторською редакцією  
Комп'ютерна верстка      О. Г. Ровенська

120/2009. Формат 60 x 84/16. Ум. друк. арк.  
Обл.-вид. арк. 2,27. Тираж 300 прим. Зам. № 31.

Видавець і виготівник  
«Донбаська державна машинобудівна академія»  
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК №1633 від 24.12.2003.